14/10/2019

Αριθμητική Ανάλυση

## Πρόσθεση - Αφαίρεση:

Από της πράξης $x+y$ υπολογίζουμε

$$z = fl(fl(x) + fl(y)) = fl(x(1+\varepsilon_1) + y(1+\varepsilon_2)) =$$

$$= x(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) + y(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) =$$

$$= x(1+\varepsilon)^2 + y(1+d)^2 = x(1+2\varepsilon+\varepsilon^2) + y(1+2d+d^2) \simeq$$

$$\simeq x+y + 2(x\varepsilon + yd), \quad |\varepsilon|, |d| \leq u$$

Το απόλυτο σχετικό σφάλμα είναι:

$$\left|\frac{z-(x+y)}{x+y}\right| \simeq \left|\frac{\cancel{(x+y)}+2(x\varepsilon+yd)-\cancel{(x+y)}}{x+y}\right| = 2\left|\frac{x\varepsilon+yd}{x+y}\right| \leq 2\,\frac{|x|\cdot|\varepsilon| + |y||d|}{|x+y|}$$

$$\leq 2u\,\frac{|x|+|y|}{|x+y|}$$

- Αν $x,y$ ομόσημα (Πρόσθεση τότε $|x+y| = |x| + |y|$)
  Επομένως το απόλυτο σχετικό σφάλμα εκτιμάται ως $2u$
- Αν $x,y$ ετερόσημα τότε $\frac{|x|+|y|}{|x+y|} > 1$, αν $x \simeq -y$ τότε το σφάλμα γίνεται πολύ μεγάλο.

Η αφαίρεση είναι μη ευσταθής πράξη.

Άσκηση: Να υπολογιστεί η παράσταση $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ αν $x,y$ ομόσημοι.

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = x+y$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το άθροισμα $S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$ όπου $a_i$, $i = 1,2,\dots,N$ είναι αριθμοί μηχανής

Ο υπολογιστής εκτελεί διαδοχικά

$$S_1 = \tilde{S}_1 = a_1, \quad \tilde{S}_k = \tilde{S}_{k-1} + a_k, \quad k = 2,3,\dots,N$$

$\tilde{S}_1 = a_1$

$\tilde{S}_2 = fl(\tilde{S}_1 + a_2) = (\tilde{S}_1 + a_2)(1+\varepsilon_1) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1)$

$\tilde{S}_3 = fl(\tilde{S}_2 + a_3)(1+\varepsilon_2) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1) + a_3(1+\varepsilon_2)$

$\tilde{S}_4 = fl(\tilde{S}_3 + a_4) = (\tilde{S}_3 + a_4)(1+\varepsilon_3) = (a_1 + a_2)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) +$
$+ a_3(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) + a_4(1+\varepsilon_3)$

Υπάρχουν $d_1, d_2, d_3$ τέτοια ώστε

$\tilde{S}_4 = (a_1 + a_2)(1+d_1)^3 + a_3(1+d_2)^2 + a_4(1+d_3)$

$|d_1|, |d_2|, |d_3| \leq u$

Επαγωγικά έχουμε ότι

$\tilde{S}_n = (a_1 + a_2)(1+d_1)^{N-1} + a_3(1+d_2)^{N-2} + \dots + a_{N-1}(1-d_{N-2})^2 + a_N(1+d_{N-1})$

$\approx (a_1 + a_2)(1+(N-1)d_1) + a_3(1+(N-2)d_2) + \dots + a_{N-1}(1+2d_{N-2}) =$

$= + a_N(1+d_{N-2})$

$= S_n + (N-1)d_1(a_1 + a_2) + (N-2)d_2(a_3) + \dots + 2d_{N-2}a_{N-1} + d_{N-1}a_N$

Για το απόλυτο σφάλμα έχουμε

$|\tilde{S}_N - S_N| \approx |(N-1)d_1(a_1+a_2) + (N-2)d_2 a_3 + \dots + d_{N-1}a_N| \leq$

$\leq (N-1)|d_1|(a_1 + a_2) + (N-2)|d_2|a_3 + \dots + |d_{N-1}|a_N$, όπου $a_i > 0$

$|\tilde{S}_N - S_N| \lessapprox u((N-1)(a_1 + a_2) + (N-2)a_3 + \dots + a_N)$

Συμπέρασμα: Για την πρόσθεση πολλών θετικών αριθμών τους διατάσσουμε σε αύξουσα τάξη ώστε να έχουμε το μικρότερο δυνατό σφάλμα.

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \to \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$

Αν αντί αυτού εκτελέσαμε $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N+1-i}$

Ένας αλγόριθμος είναι ευσταθής αν μικρά σφάλματα στους υπολογισμούς προκαλούν σχετικά μικρά σφάλματα στο αποτέλεσμα, αλλιώς λέγεται ασταθής.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η ποσότητα $e^x$, $x<0$.

$x = -12.5$

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$ , αντί αυτού

θα εκτελέσουμε: $e^x \approx \sum_{i=0}^{N} \frac{x^i}{i!}$ , $M = M(10, 7, -38, 38)$

Βρέθηκε $e^{-12.5} \approx 0.162916 \times 10^{-2}$ , σωστό αποτέλεσμα $e^{-12.5} = 0.3726653 \times 10^{-5}$

Για $n = 34$ έχουμε σύγκλιση με ακρίβεια 5 ψηφίων.

Οι διαδοχικοί όροι του αθροίσματος είναι 1, $-12.5$, 78.125, ...

Ο 13ος όρος είναι 30379.68 από εκεί και πέρα μικραίνουν απόλυτα

Κατά την αποθήκευση του 13ου όρου έχουμε σφάλμα της τάξης του $10^{-2}$, αυτό παραμένει επομένως βρήκαμε εσφαλμένο αποτέλεσμα.

Ευσταθής αλγόριθμος, υπολογίσαμε το $e^{12.5} \approx \sum_{i=0}^{N} \frac{(12.5)^i}{i!}$ και στη συνέχεια βρίσκουμε το $\frac{1}{e^{12.5}}$